[Wh.: (Lineare) Schwingungsgleichung:

$$(*) \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$(\omega > 0)$. Zugehöriges dynamische System:

$$\varphi^t(x, \dot{x}) = x \cdot \cos(\omega t) + \frac{\dot{x}}{\omega} \sin(\omega t).$$

2 Methoden, um cos, sin zu „entdecken":

1. Methode: Lineare Algebra

$\rightsquigarrow$ cos und sin als Real- und Imaginärteil von $t \mapsto e^{it}$.

2. Methode 1. Integral

(1.14) Definition. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f \in C^r(D, \mathbb{R}^n)$. Eine stetig diff'bare Funktion $H : D \to \mathbb{R}$ heißt ein 1. Integral für $\dot{x} = f(x)$, wenn für das zugehörige dynamische System $\varphi : \Omega \to D$ gilt:

$$H(\varphi^t(x)) = H(x) \quad , \quad \forall t \in I(x), \ \forall x \in D.$$

(1.15) Kommentar. (a) Ist $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von H, d.h.

$$\operatorname{grad}(H)(x) \neq 0 \quad , \quad \forall x \in H^{-1}(c),$$

so ist die Niveaufläche von H

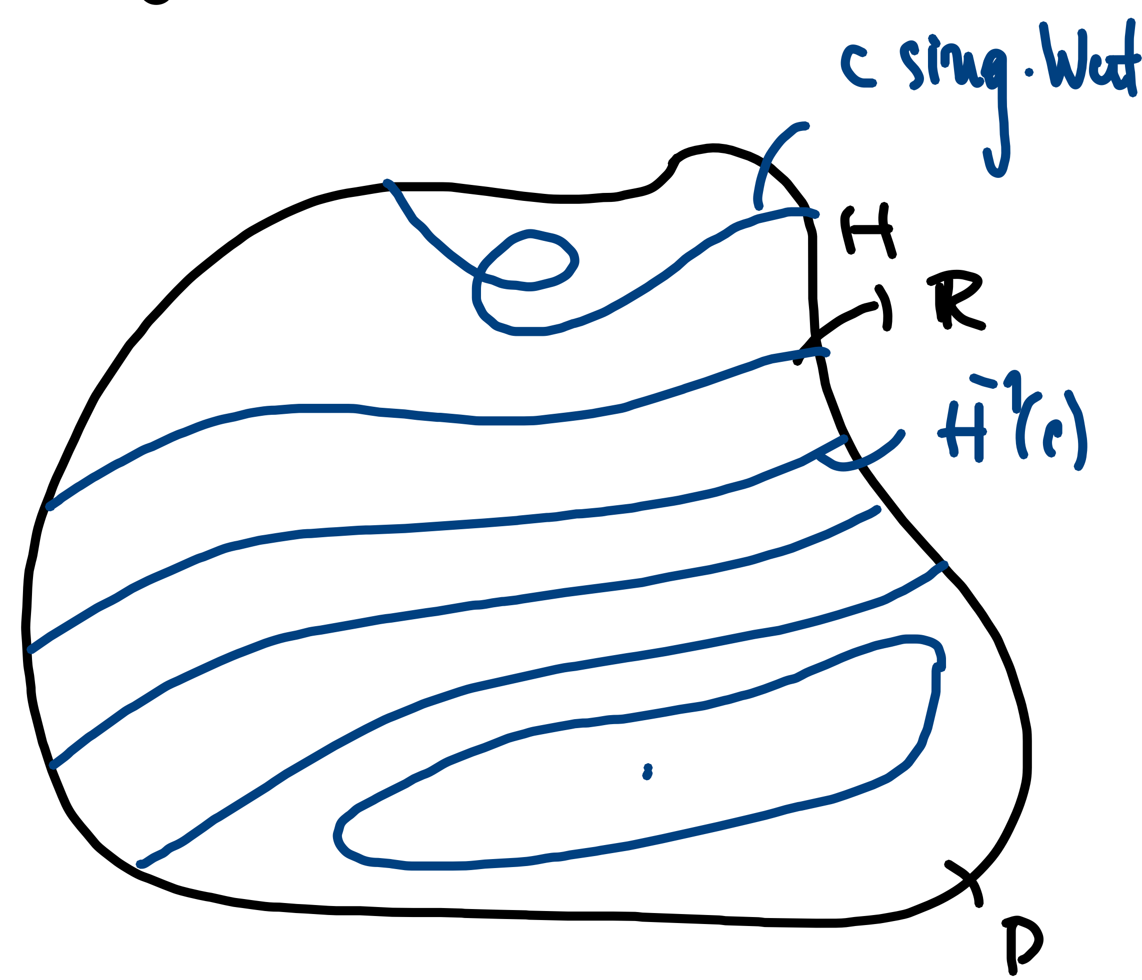
$$N_c = \{x \in D : H(x) = c\} = H^{-1}(c) \subseteq D$$

eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit nach dem impliziten Funktionensatz.

Nach einem Satz von Sard sind fast-alle $c \in \mathbb{R}$ (d.h.: das Kompliment ist eine Lebesgue-Nullmenge) regulär. D wird daher durch

$$\left(H^{-1}(c)\right)_{c \in \mathbb{R}}$$

in Hyperflächen partitioniert.



(b) $H : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann ein 1. Integral für $\dot{x} = f(x)$, wenn die Richtungsableitung von H in Richtung f verschwindet.

$$X_f H = 0.$$

Wobei

$$X_f(u) := \langle f, \operatorname{grad}(u) \rangle = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$$

$\Big[$ $X_f = \sum f_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ Richt.-abl. in Richtung f. $\Big]$

Denn: „$\Longrightarrow$":

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} H(\varphi^t(x)) = \left\langle \operatorname{grad}(H)(\varphi^t(x)), \frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi^t(x) \right\rangle$$

$$= \langle \operatorname{grad}(H)(x), f(x) \rangle = X_f(H)(x), \quad \forall x \in D.$$

„$\Longleftarrow$": Sei $x \in D$ bel. Zeige: $H(\varphi^t(x)) = H(x)$, $\forall t \in I(x)$.

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt} H(\varphi^t(x)) \overset{KR}{=} \langle \mathrm{grad}(H)(\underbrace{\varphi^t x}_{=:y}), \underbrace{\frac{d}{dt}\varphi^t(x)}_{=f(\varphi^t(x))} \rangle$$

$$= \langle \mathrm{grad}(H)(y), f(y) \rangle$$

$$= X_f H(y) = 0 \quad , \quad \forall t \in I(x)$$

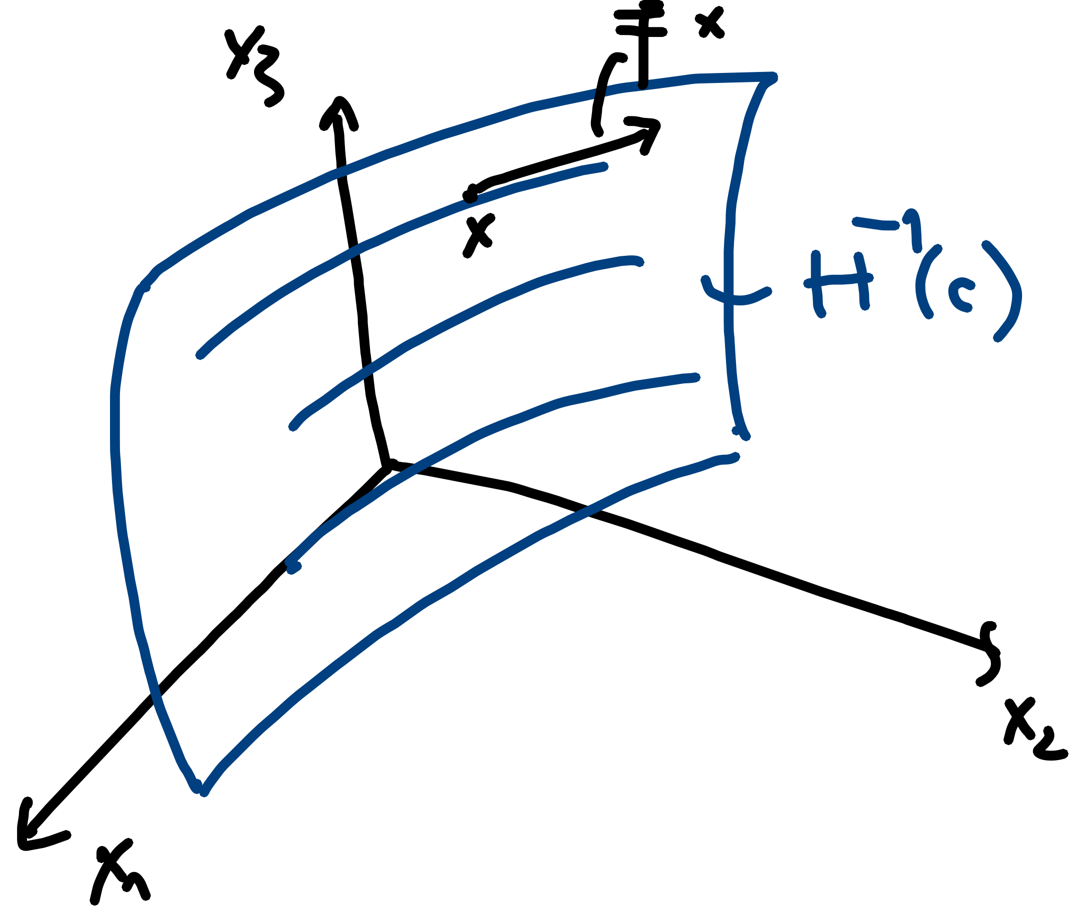
$$\rightarrow \quad H(\varphi^t(x)) = H(\varphi^0(x)) = H(x). \qquad \boxed{\checkmark}$$

(c) Der Tangentialraum von $M = H^{-1}(c)$ in $x \in M$ ist gerade durch

$$TM_x = \{ v \in \mathbb{R}^n : \langle v, \mathrm{grad}(H)(x) \rangle = 0 \}$$

gegeben. Es folgt: $f(x) \in TM_x$, $\forall x \in M$.
Man bekommt daher ein Vektorfeld $f|M$ auf M und hat nun nur noch einen $(n-1)$-dimensionalen Phasenraum.

(Dimensreduktion).



⌈ Insbesondere im Fall $n=2$ führt das zu Kurven, mit denen man den Fluss wieder leicht qualitativ erklären (und mit Quadratur sogar analytisch berechnen) kann.

(1.16) Bemerkung. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ Gebiet, $H : D \to \mathbb{R}$ $(r+1)$-mal stetig diff'bar und

$$(*) \qquad \dot q = \frac{\partial H}{\partial p}(q,p), \quad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p).$$

das zugehörige Hamiltonsche System. Dann ist H ein 1. Integral für $(*)$.

Bewais. Mit $f = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}\right)$ wird die Richtungs X_f zu

$$X_f = \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial}{\partial q}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial}{\partial p}\right\rangle,$$

also:

$$X_f H = \left\langle \frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial H}{\partial q}\right\rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p}\right\rangle = 0.$$

$\blacksquare$

(1.17) Definition. Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Man nennt ein (stetiges) Vektorfeld $f : G \to \mathbb{R}^n$ konservativ, wenn es eine

$\mathcal{C}^1$-Funktion $V: G \to \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$f = -\operatorname{grad}(V)$$

ist.

(1.18) Kommentar. (a) Ist $f: G \to \mathbb{R}^n$ konservativ und $\gamma: [a,b] \to G$ ein stetig-diff'barer Weg und geschlossen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$. Dann gilt:

$$\int_\gamma f \, ds = 0.$$

Hier ist mit $\int_\gamma f \, ds$ das Wegintegral von f entlang γ gemeint, also das Integral von f über $C := \gamma([a,b])$ bzgl. des 1-dimensionalen Hausdorff-Maßes auf C, welches nach der so genannten Flächenformel so berechnen kann:

$$\int_C f\,ds = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle\,dt$$

ist. Es ist nämlich im Falle $f = -\operatorname{grad}(V)$ (für ein $V \in C^1(G)$):

$$\int_\gamma f\,ds = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle\,dt = -\int_a^b \langle \underbrace{\operatorname{grad}(V)(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle}_{\overset{KR}{=} \frac{d}{dt}(V \circ \gamma)(t)}\,dt$$

$$\overset{HS}{=} V(\gamma(a)) - V(\gamma(b)) = 0.$$

(b) In der Physik bezeichnet man den Term $\int_\gamma f\,ds$ als die entlang γ geleistete Arbeit, die man im Kraftfeld

f existieren muss.

Ist umgekehrt für ein Feld f die geleistete Arbeit entlang aller geschlossenen Wege Null

$$(*) \qquad \int_\gamma f\, ds = 0 \;, \quad \forall \text{ geschl. } \gamma \text{ in } G,$$

so zeigt man (ähnlich wie in der Funktionentheorie), dass f ein Potential V hat,

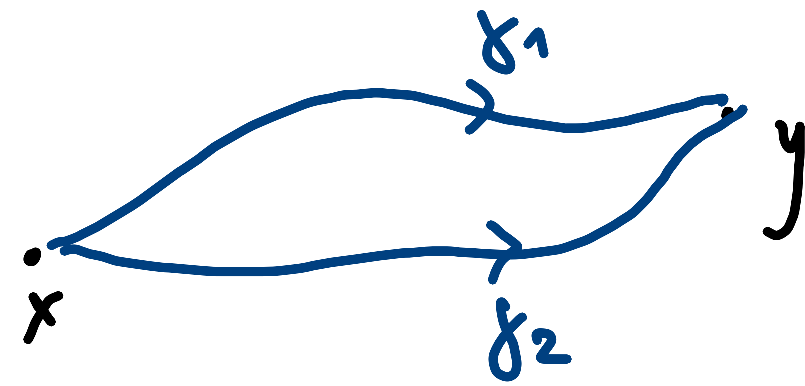
$$f = -\operatorname{grad}(V),$$

wo $V: G \to \mathbb{R}$ bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist, also f konservatives Vektorfeld ist.

(c) Äquivalent zu $(*)$ ist die Bedingung

(**) $\int_\gamma f \, ds$ hängt nur von Endpunkten $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ ab,

dass also die geleistete Arbeit unabhängig vom gewählten Weg ist.



Es gibt oft physikalische Gründe, dass Newton-Systeme

$$\ddot{x} = f(x)$$

auf $D = G \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ und $f: G \to \mathbb{R}^n$ C^r, konservativ sind, also von der Form

$$\ddot{x} = -\operatorname{grad}(V)(x)$$

mit einer C^{r+1}-Fkt. $V: G \to \mathbb{R}$.

(1.19) Beispiel. (a) Im Fall $n=1$, also $f: I \to \mathbb{R}$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall), ist jedes Feld konservativ, denn man kann ja für $V: I \to \mathbb{R}$ das Negative einer Integralfunktion nehmen,

$$V(x) = -\int_{x_0}^{x} f(y)\,dy .$$

(b) Für $n \geq 2$ setzt man übrigens bei der Bedingung (**)

$$V(x) = -\int_{\gamma_x} f\,ds ,$$

wo $\gamma_x: [0,1] \to G$ ein bel. Weg von x_0 nach x ist (x_0 fest)

(1.20) Kommentar. (a) Eine notwendige Bedingung für ein $\mathcal{C}^1$-Feld $f: G \to \mathbb{R}^n$ konservativ zu sein, ist

$$(*) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \text{ für alle } 1 \leq i < j \leq n$$

Denn ist $f = -\operatorname{grad}(V)$ für eine $\mathcal{C}^2$-Fkt. $V: G \to \mathbb{R}$, so ist nach dem Satz von Schwarz

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \, \partial x_i} \stackrel{S}{=} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

(b) Ist umgekehrt für ein f $(*)$ erfüllt und G einfach zusammenhängend (oder allgemeiner die 1. de Rhamsche Homologiegruppe $H_1(G) = 0$), so ist nach einem Lemma von Poincaré

f auch konservativ.

(1.21) Bemerkung. Ist $f: G \to \mathbb{R}^n$ ein konservatives Vektorfeld und $V: G \to \mathbb{R}$ ein Potential für f, $f = -\operatorname{grad}(V)$, so gilt für das zugehörige Newton-System

$$(*) \qquad \ddot{x} = f(x)$$

auf $D = G \times \mathbb{R}^n$, dass es Hamiltonsch mit Hamilton-Funktion $H: D \to \mathbb{R}$,

$$H(x,y) = \frac{1}{2}\|y\|^2 + V(x)$$

ist. Insbesondere ist also H ein 1. Integral für $(*)$.

Beweis. Mit $f = -\operatorname{grad}(V)$ wird $(*)$ zu:

$$(**) \qquad \begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= f(x) = -\mathrm{grad}(V)(x) \end{aligned}$$

Andererseits ist für die *Energie* H:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \mathrm{grad}(V)(x), \qquad \frac{\partial H}{\partial y} = y$$

Es ist also

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

also ist $(**)$ hamiltonsch mit Hamilton-Funktion H. $\square$

(1.20) *Kommentar.* (a) Der Term $\frac{1}{2} m \|y\|^2$ wird in der physikalischen Literatur als *kinetische Energie* bezeichnet (bei

$m\ddot{x} = f(x)$ wird H zu $H = \frac{1}{2}m\|y\|^2 + V(x)$)
das Potential V als *potentielle Energie* und
H als *Gesamtenergie*.

(1.21) *Beispiel* (Hookesches Gesetz). Die Federkraft $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -kx$, ist konservativ mit *Potential* $V: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $V(x) = +\frac{1}{2}kx^2$. Deshalb wird für die (lineare) Schwingungsgleichung

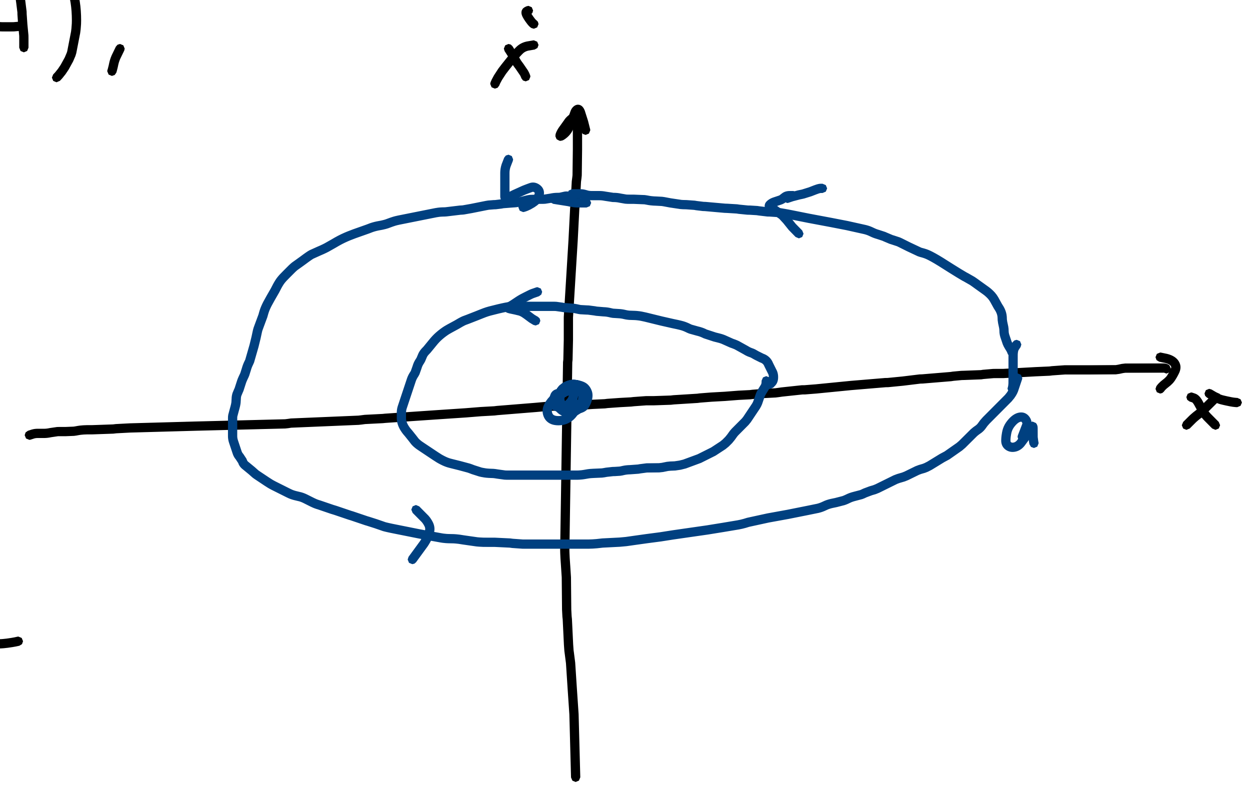
$$(*) \qquad \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

die Funktion $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\omega^2 x^2$$

zu einem 1. Integral für $(*)$.

Die Niveaulinien $\{H=c\}$ bestehen also für $c=0$ nur aus der Gl.-lage $(x_0,y_0)=(0,0)$, (das sind die kritischen Punkte von H), für $c<0$ leer und für $c>0$ aus den um (x_0,y_0) zentrierten Ellipsen



$$H(x,y)=c \iff \frac{x^2}{\left(\sqrt{2c}\cdot\frac{1}{\omega}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{2c}\right)^2}=1$$

also mit den Hauptachsen $a=\sqrt{2c}\,\frac{1}{\omega}$, $b=\sqrt{2c}$.

Das Phasendiagramm ist damit klar. (Lediglich die Umlaufzeiten der allesamt periodischen Bahnen wären noch interessant.)